ІНТЕГРАЦІЯ ЗНАНЬ ТА УМІНЬ УЧНІВ ПРИ ВИКОРИСТАННІ РІЗНИХ МЕТОДІВ ДОВЕДЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ РЕЧЕНЬ

Василь КУШНІР, Ренат РІЖНЯК

В статті досліджуються проблеми використання прямих, непрямих та спеціальних методів доведень математичних речень з метою організації інтегративної навчальної діяльності учнів.

The paper investigates the problem of direct, indirect and special methods of proof of mathematical proposals to the organization of integrative learning activities of students.

Процес об'єднання (інтеграції) розрізнених математичних знань та умінь відіграє визначальну роль в організації навчальної діяльності учнів (студентів) і вказує на способи регулювання інтегративною навчальною діяльністю під час навчання.

Реалізація інтегративного підходу у навчанні дає можливість розглядати зміст, форми та методи навчання окремої дисципліни саме у процесі взаємодії зі змістом, формами та методами інших навчальних дисциплін, співставляти закономірності та закони предмету вивчення із закономірностями та законами природи. Раніше нами були представлені результати дослідження щодо використання інтеграції професійних знань майбутніх учителів математики, розроблена та апробована система критеріїв сформованості інтегрованих професійних знань вчителів та створена модель підвищення ефективності професійної підготовки майбутніх вчителів математики на основі інтегративного підходу [1]. Робота [2] є одним з досліджень, що присвячені вивченню зв'язків інтегративного характеру між розв'язуванням математичних задач та моделюванням. У роботі продемонстровано, що **створення моделі задачної ситуації у вигляді матриці інформації** дає можливість повно і ефективно провести етап матеріалізації розумових дій суб'єкта навчання у знаковій формі і дозволяє моделювати процес розв'язування задачної ситуації у вигляді послідовностей моделей його етапів. У роботах [3] та [4] ми дійшли висновку, що інтегративна лінія у шкільному курсі математики поступово знаходить більш детальну реалізацію у використанні **навчальних математичних задач інтегративного змісту** (це задачі творчого характеру; задачі з потужним математичним змістом та складною структурою взаємозв'язків між компонентами їх фабули; задачі, що мають потенціал створення на їх базі нових задач та серій задач). У роботі [5] на прикладі використання різних способів розв'язування однієї задачі у формуванні в учнів інтегративних знань і умінь ми зробили висновок про формування **інтегративного образу задачі**, під яким розуміли цілісну структуру знань, умінь та навичок, якою необхідно володіти учневі (суб'єкту навчання) для дослідження задачі на предмет її розв'язування та вивчення. У роботах [6] та [7] ми, використавши подібні методи дослідження, описали тлумачення понять **інтегративний образ задачної теми** та **інтегративний образ способу розв'язання задачі**, детально розглянувши їх структуру та роль у контексті формування ключових та математичних компетентностей школярів [8].

У даній статті автори мають намір детально розглянути ***процес роботи над математичним реченням у контексті оцінки можливості його доведення з використанням різних логічних структур, а, отже, різних методів доведення***.

Під *методом доведення* будемо розуміти спосіб зв'язку аргументів від умови до висновку судження. Методи доведення, що використовуються в шкільному курсі математики, можна класифікувати за двома основами:

- по тому, як будується обґрунтування тези (пряме й непряме) ;
- по тому, який математичний апарат використовується для доведення.

Назвемо кілька загальних прийомів доведення за першою основою, тобто з урахуванням того, як будується обґрунтування тези.

Прямі прийоми пошуку доведення:

а) прийом перетворення умови судження (синтетичний);

б) прийом перетворення висновку судження:

- відшукання достатніх основ справедливості висновку (висхідний аналіз);
- відшукання необхідних ознак справедливості судження з наступною перевіркою оборотності міркувань (спадний аналіз);

в) прийом послідовного перетворення то умови, то висновку судження.

Непрямі прийоми пошуку доведення:

а) «метод від супротивного» (істинність твердження, що доводиться, встановлюється за допомогою спростування суперечного йому судження);

б) метод виключення (теза розглядається як один з можливих варіантів припущень, коли всі припущення відкидаються, крім одного).

Методи доведення, виділені за другою основою, тобто коли спосіб зв'язку аргументів узгоджується з певною математичною теорією в шкільному курсі математики, такі:

а) метод геометричних перетворень, при реалізації котрого поряд з логічною основою використовується апарат геометричних перетворень;

б) алгебраїчні методи (рівнянь, нерівностей, тотожних перетворень);

в) векторний, що використовує апарат векторної алгебри;

г) координатний, що дозволяє встановлювати перехід від геометричних відношень до аналітичних.

У даній роботі зупинимося на ***застосуванні у процесі доведення математичних речень різних методів*** і, як наслідок, дослідимо методичну доцільність використання такого прийому у контексті формування в учнів інтегративних знань і умінь в оперуванні математичним та логічним матеріалом. Під ***інтегрованим образом математичного речення*** будемо розуміти цілісну структуру знань, умінь та навичок, якою необхідно володіти учневі (суб'єкту навчання) для оцінки можливості доведення наперед заданого математичного речення різними методами. Зазначимо, що як не можна говорити про повний методів доведень, що можуть бути використані для обраного математичного речення, так і немає сенсу говорити про найбільший (найповніший) обсяг інтегрованого образу математичного речення. Обсяг його інтегрованого образу будемо визначати у відповідності до поставлених цілей навчальної діяльності. Визначимо зміст інтегративної навчальної діяльності учнів при доведенні математичних речень так:

- формування *інтегрованого образу математичного речення*, що представляє собою цілісну структуру знань, умінь та навичок, наявність яких у суб'єкта є умовою володіння обраним методом доведення;
- *аналіз* ознак та характеристик компонентів змісту інтегрованого образу способу математичного речення, їх *порівняння*;
- *абстрагування* від несуттєвих характеристик компонентів інтегрованого образу математичного речення;
- мисленне об'єднання компонентів інтегрованого образу математичного речення за їх істотними ознаками – *узагальнення*;
- розподіл компонентів інтегрованого образу математичного речення на взаємопов'язані класи за найбільш істотними ознаками по їх подібності – *класифікація*;
- розділення та подальше об'єднання не окремих компонентів інтегрованого образу математичного речення, а їх класів (наприклад, у вигляді ієрархії) – *систематизація*;
- утворення нового знання про методи доведення математичного речення – *синтез* нових знань.

Отже, основна ***мета нашого дослідження*** буде полягати у тому, щоб визначити методичні умови, при яких використання для доведення обраного математичного речення різних методів буде набувати методичної доцільності у контексті формування в учнів знань і умінь інтегративної діяльності при продуктивному оперуванні математичним матеріалом.

Розглянемо проблему дослідження на прикладі.

ЗАДАЧА. Доведіть різними способами, що в рівнобічної трапеції, у якої діагоналі перетинаються під прямим кутом, висота дорівнює середній лінії.

І СПОСІБ. Прийом перетворення умови судження (синтетичний) (рис. 1).

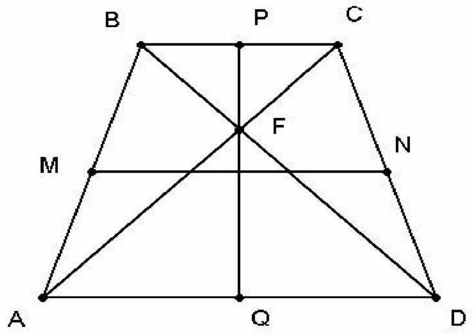


Рис.1

Дано: ABCD – трапеція (речення A_1), AB=CD (речення A_2), $\angle$AFD – прямий (речення A_3), MN – середня лінія, PQ – висота трапеції, що проходить через точку перетину діагоналей.

Довести: PQ=MN, або висота трапеції дорівнює її середній лінії (речення A_4).

Доведення. ΔBFC прямокутний – речення A_5 (так як діагоналі перетинаються під прямим кутом), рівнобедрений – речення A_6 (так як трапеція є рівнобічною) – тому $\angle PBF=45^0$, $\angle BFP=45^0$ і FP є його висотою, бісектрисою та медіаною, проведеними до основи (речення A_7). Отже, ΔBPF – рівнобедрений (речення A_8), а тому BP=PF (речення A_9). Аналогічно доводимо, що AQ=QF (речення A_{10}). Тоді маємо: MN=(BC+AD)/2=BP+AQ=PF+FQ=PQ (речення A_{11} – співпадає з реченням A_4).

Проаналізуємо хід доведення речення синтетичним методом з точки зору способу використання основних (елементарних) прийомів логічного мислення – законів логіки. Очевидно, що істинність речення A_5 доведена за правилом висновку: $\dfrac{A_3,\ A_3 \Rightarrow A_5}{A_5}$ (читається даний запис так: речення A_3 є істинним і істинним є факт, що з речення A_3 випливає речення A_5, отже речення A_5 є істинним), а істинність речення A_6 – за сукупністю правил кон'юнкції та висновку: $\dfrac{A_1,\ A_2}{A_1 \wedge A_2}$, $\dfrac{A_1 \wedge A_2,\ A_1 \wedge A_2 \Rightarrow A_6}{A_6}$. Аналогічно до попереднього речення ми доводимо істинність речення A_7: $\dfrac{A_5,\ A_6}{A_5 \wedge A_6}$, $\dfrac{A_5 \wedge A_6,\ A_5 \wedge A_6 \Rightarrow A_7}{A_7}$, а далі за правилом висновку – речення A_8 та A_9: $\dfrac{A_7,\ A_7 \Rightarrow A_8}{A_8}$, $\dfrac{A_8,\ A_8 \Rightarrow A_9}{A_9}$. Для доведення речення A_{10} використовується аналогічна логічна послідовність, а для доведення істинності речення A_{11}, яке співпадає з висновком задачі A_4, знову використовується сукупність правил кон'юнкції та висновку: $\dfrac{A_9,\ A_{10}}{A_9 \wedge A_{10}}$, $\dfrac{A_9 \wedge A_{10},\ A_9 \wedge A_{10} \Rightarrow A_{11}}{A_{11}}$. Як бачимо, при доведенні математичного речення синтетичним методом шуканим є завжди висновок.

II СПОСІБ. Відшукання достатніх основ справедливості висновку (висхідний аналіз) з використанням допоміжної побудови (рис. 2).

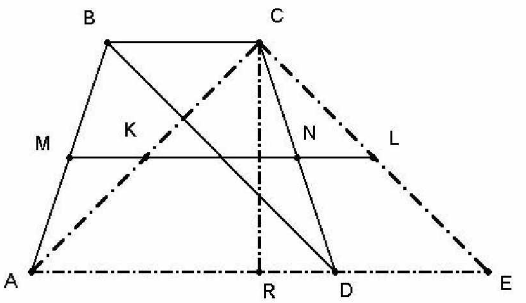


Рис. 2

Дано: ABCD – трапеція (речення A_1), AB=CD (речення A_2), діагоналі трапеції перетинаються під прямим кутом (речення A_3), MN – середня лінія, CR – висота трапеції, опущена з вершини верхньої основи.

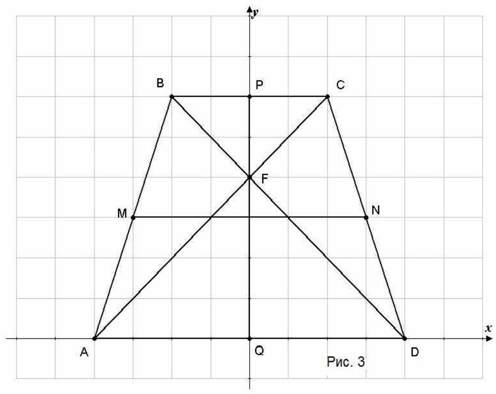
Довести: CR=MN (речення A_4).

Доведення. Використаємо для доведення додаткову побудову: проведемо з точки C пряму CE, паралельну до діагоналі BD. Отримали прямокутний трикутник ACE (KL – його середня лінія, а CR – висота). Для того, щоб довести рівність CR=MN (речення A_5), розглянемо трикутник ACE і доведемо рівність KL= CR (речення A_6) (очевидно, що так як MK – середня лінія трикутника MBC (речення A_7) і NL – середня лінія трикутника CDE (речення A_8), то справджуються такі рівності: MK=BC/2=DE/2=NL. Отже: MN=MK+KN=NL+KN=KL (речення A_9)).

Щоб довести, що KL= CR, доведемо факт рівності відрізків AR та CR – речення A_{10} (справді, так як KL – середня лінія трикутника ACE, то KL=AE/2=AR). Прямокутний трикутник ACE рівнобедрений – речення A_{11} (бо діагоналі рівнобічної трапеції рівні), тому $\angle$ CAR=45^0, Δ ARC – також рівнобедрений – речення A_{12} (бо $\angle$ CAR=45^0, $\angle$ CRA=90^0, а тому і $\angle$ ACR=45^0), отже, AR=RC, а тому KL=RC і MN=RC.

Проаналізувавши аналогічно до попереднього випадку хід доведення речення аналітичним методом з точки зору способу використання основних (елементарних) прийомів логічного мислення – законів логіки, ми побачимо, що при доведенні математичного речення аналітичним методом шуканою, як правило, є його умова.

III СПОСІБ. Координатний (рис. 3).



Введемо систему координат. Вісь x проходить по стороні AD, вісь y – по висоті PQ трапеції. Тоді елементам трапеції задамо такі координати (див. рис. 3):

$$A(-a;0), B(-b;c), C(b;c), D(a;0)$$
$$P(0;c), Q(0;0)$$

$$M\left(-\frac{a+b}{2};\frac{c}{2}\right), N\left(\frac{a+b}{2};\frac{c}{2}\right)$$

Знайдемо довжини відрізків MN та PQ:

$$PQ = c$$

$$MN = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}-\frac{c}{2}\right)^2} = a+b.$$

Отже, щоб довести рівність MN та PQ, треба довести рівність $a+b=c$, або треба довести рівність AQ+BP=PQ. А цей факт вже був нами встановлений у першому способі розв'язування.

IV СПОСІБ. Векторний (рис. 4).

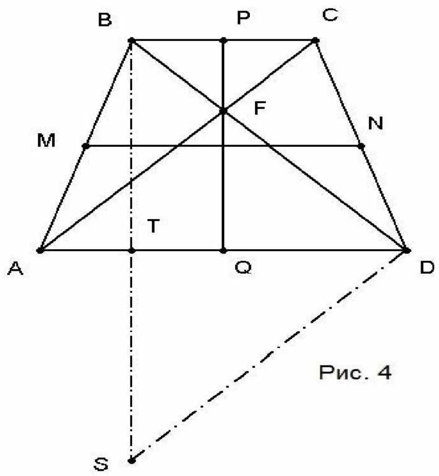


Рис. 4

Розглянемо вектор $\overrightarrow{PQ}$:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PF} + \overrightarrow{FQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DQ}.$$

Або: $$PQ = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DQ}.$$

Помноживши останню рівність на 2, отримаємо:

$$2\cdot PQ = 2\cdot\overrightarrow{PB} + 2\cdot\overrightarrow{BD} + 2\cdot\overrightarrow{DQ} =$$

$$= 2\cdot\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CB}.$$

З іншої сторони: $2\cdot\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CB}$. Почленно віднявши дві останні векторні рівності, отримаємо:

$$2\cdot\overrightarrow{PQ} - 2\cdot\overrightarrow{NM} = 2\cdot\overrightarrow{BD},$$ або:

$$\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{NM}.$$

Піднесемо останню рівність векторів до квадрату:

$$\overrightarrow{PQ}^2 - 2\cdot\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BD}^2 = \overrightarrow{NM}^2.$$

Так як:

$$\overrightarrow{BD}^2 - 2\cdot\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BD}\cdot\left(\overrightarrow{BD} - 2\cdot\overrightarrow{PQ}\right) =$$

$$= \overrightarrow{BD}\cdot\left(\overrightarrow{BD} - 2\cdot\overrightarrow{BT}\right) = \overrightarrow{BD}\cdot\left(\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BS}\right) = I$$

$$) = \overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{SD} = 0$$

Отже, $\overrightarrow{PQ}^2 = \overrightarrow{NM}^2$, а тому відрізки PQ та MN є рівними.

Аналізуючи кожний зі способів доведення, неважко з'ясувати, що в основі кожного з них об'єктивно лежить логічна основа доведення; тому навчити розуміти дедуктивне доведення і опанувати прийомами його пошуку й виконання є одна з істотних особливостей навчання курсу математики. Для того, щоб учні опанували прямим і непрямим доведеннями, необхідно сформувати в них певну послідовність умінь.

Уміння доводити – складне вміння, воно складається з:

- уміння шукати доведення (аналізувати речення); одержувати продуктивні наслідки з умови; з'ясовувати умови, при яких можливий висновок; висловлювати правдоподібну гіпотезу й т.п.;
- уміння проводити доведення (на основі отриманої гіпотези, що виникла як результат пошуку доведення), виконувати послідовність висновків й обґрунтовувати правомірність отриманих висновків;
- уміння оформляти доведення теореми.

З метою визначення змісту інтегративної навчальної діяльності учнів у процесі доведення математичних речень різними способами здійснимо структурний аналіз компонентів інтегрованого образу способу розв'язування та аналіз необхідних знань та умінь (а також їх взаємозв'язків), які слід актуалізувати та відтворити при виконанні зазначених завдань. Результати такого аналізу можна представити у вигляді ієрархії компонентів інтегрованого образу доведення математичного речення, яка сама по собі у практичному використанні є досить корисною; особливо це стосується підготовки на базі таких структурних аналізів уроків узагальнення та систематизації знань та умінь учнів або розробки з використанням подібних деталізованих схем системи завдань навчального чи контролювального характеру. Дійсно, результати такого аналізу ілюструють компоненти інтегрованого образу доведення математичного речення у розрізі: *основні поняття*, засвоєння або знання яких необхідне для доведення речення обраним методом; основні *математичні дії та уміння*, виконання яких має бути сформоване в учнів для вільного оперування математичним та логічним апаратом у процесі доведення; *узагальнені дії*, що мають бути сформовані для оволодіння обраним для доведення методом.

Зазначимо, що вказані чотири способи не вичерпують можливих варіантів доведення обраного математичного речення. Межі даної статті потребують деталізації та розкриття методичних умов, при яких використання згаданих методів доведення буде набувати методичної доцільності у контексті формування в учнів знань та умінь інтегративної діяльності при продуктивному оперуванні математичним матеріалом. У якості згаданих умов за матеріалами дослідження можна вказати такі:

1. Формування інтегрованого образу доведення математичного речення відбувається у процесі детального аналізу та порівняння ознак та характеристик окремих компонентів вказаного інтегрованого образу.
2. Вибір методу доведення математичного речення проводиться з врахуванням загальної мети організації навчальної діяльності учнів (або суб'єктів навчання); інакше кажучи – проблема вибору методу доведення є свого роду евристикою, а отже проблемою поставленої мети і залежить лише від планування вчителем можливої (або необхідної) широти поля можливостей навчальної діяльності учнів [9]. Отже, кінцевий результат формування інтегрованого образу способу розв'язування залежать від мети, поставленої вчителем чи викладачем.
3. При формуванні інтегрованого образу доведення математичного речення вчитель організовує процес мисленого об'єднання компонентів інтегрованого образу за їх істотними ознаками; а тому при проведенні описаної навчальної роботи продуктивним для використання є метод узагальнення знань та умінь учнів. У процесі планування та підготовки формування інтегрованого образу доведення математичного речення здійснюється розподіл компонентів інтегрованого образу на взаємопов'язані класи за найбільш істотними ознаками по їх подібності; у процесі безпосереднього формування інтегрованого образу доведення математичного речення відбувається систематизація – об'єднання класів компонентів інтегрованого образу у єдину цілісність з подальшим синтезом нових знань.

Отже, проведене дослідження дає підстави підтвердити доцільність використання різних методів доведення математичних речень з метою формування стійкого інтегрованого образу. Тоді результатом такої діяльності буде синтез нових знань – зв'язків між отриманими класами компонентів та самими компонентами – і, як наслідок, формування інтегрованого образу доведення математичного речення, що обраний предметом дослідження. Більше того, до сформованого кінцевого продукту – згаданого інтегрованого образу – буде належати і сама інтеграція обраних методів доведення. Саме це і має забезпечити формування в учнів знань та умінь інтегративної математичної діяльності.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. В. Нічишина, Р. Ріжняк. Інтеграція професійних знань майбутніх вчителів математики. – Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В.Винниченка, 2007. – 92 с.
2. В. Кушнір, Г. Кушнір, Р. Ріжняк. Системне моделювання процесу розв'язування текстових математичних задач: кібернетичний підхід // Постметодика. – 2009. – № 4 (88). – с. 22-27.
3. В. Кушнір, Р. Ріжняк. Формування в учнів складних умінь використовувати моделювання у процесі розв'язування математичних задач інтегративного змісту // Математика в школі. – 2009. – № 5. – с. 13-17.
4. В. Кушнір, Р. Ріжняк. Розв'язування математичних задач інтегративного змісту засобами комп'ютерного моделювання // Математика в школі. – 2009. – № 10. – с. 34-39.
5. В. Кушнір, Р. Ріжняк. Інтеграція математичних знань та умінь при використанні різних способів розв'язування задач // Постметодика. – 2010. – № 2 (93). – с. 24-31.
6. В. Кушнір, Р. Ріжняк. Формування в учнів умінь інтегративної діяльності з використанням наборів математичних задач, утворених задачною темою // Наукові записки. – Випуск 90. – Серія: Педагогічні науки. – Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В.Винниченка. – 2010 (с. 156-161).
7. В. Кушнір, Р. Ріжняк. Інтеграція знань та умінь учнів при універсалізації способу розв'язування різних математичних задач. // Математика в школі. – 2011.
8. С.А. Раков. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ: Монографія. – Х.: Факт, 2005. – 360 с.
9. В. Кушнір. Системний аналіз педагогічного процесу: методологічний аспект. – Кіровоград: КДПУ, 2001. – 340с.

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

Кушнір Василь Андрійович – доктор педагогічних наук, професор кафедри педагогіки Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка.

Ріжняк Ренат Ярославович – кандидат педагогічних наук, професор кафедри математики Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка.

Коло наукових інтересів: методологічні дослідження складних систем, зокрема педагогічного процесу.